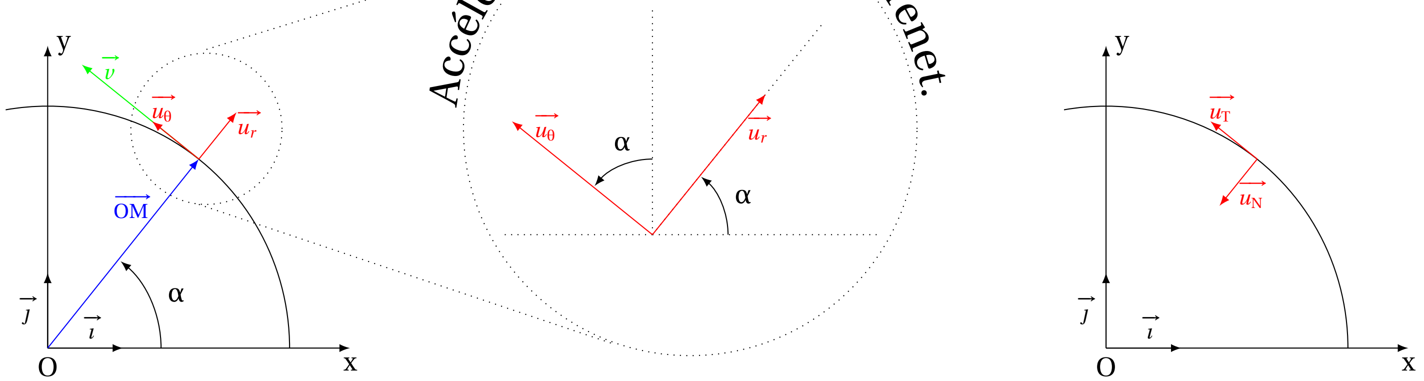
Accélération dans la base de Frenet.



Un solide se déplace sur un arc de cercle dans le sens trigonométrique.
On utilise les coordonées polaires : la base $\{\vec{u_\theta}\,;\vec{u_r}\}$ dans laquelle les vecteurs $\vec{u_\theta}$ et $\vec{u_r}$ sont unitaires, c'est à dire de norme égale à 1, alors que $\|\overrightarrow{OM}\| = r$

Les coordonnées de ces vecteurs dans le repère orthonormé sont : $\vec{u_\theta}\begin{pmatrix} -sin\alpha \\ cos\alpha \end{pmatrix}$ et $\vec{u_r}\begin{pmatrix} cos\alpha \\ sin\alpha \end{pmatrix}$

Ils s'écrivent donc : $\begin{cases} \vec{u_\theta} = -sin\alpha\,\vec{i} + cos\alpha\,\vec{j} \\ \vec{u_r} = cos\alpha\,\vec{i} + sin\alpha\,\vec{j} \end{cases}$

Ces vecteurs varient au cours du mouvement et donc au cours du temps. Nous aurons donc besoin de leurs dérivées en fonction du temps.

Lorsque l'objet se déplace, on connait la variation de l'angle α au cours du temps, notée $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}$

Oui, le physicien est économe et plutôt que d'écrire $\dfrac{d\alpha}{dt}$, il préfère écrire $\dot{\alpha}$! !

Propriété

Pour le matheux, ' (comme y') signifie "dérivée par rapport à x", x pouvant être tout ce qu'on veut !
Pour le physicien, le point (comme $\dot{y}$) signifie "dérivée par rapport au temps" et seulement par rapport au temps.

Les dérivées des vecteurs peuvent donc s'écrire : (voir les compléments ci-dessous)

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u_\theta}}{dt} = \dot{\vec{u_\theta}} = \dfrac{d\vec{u_\theta}}{d\alpha} \times \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{d\left(-sin\alpha\,\vec{i} + cos\alpha\,\vec{j}\right)}{d\alpha} \times \dot{\alpha} = \dot{\alpha} \times \left(\dfrac{d(-sin\alpha)}{d\alpha}\vec{i} - sin\alpha\dfrac{d\vec{i}}{d\alpha} + \dfrac{d(cos\alpha)}{d\alpha}\vec{j} + cos\alpha\dfrac{d\vec{j}}{d\alpha}\right) \\ \dfrac{d\vec{u_r}}{dt} = \dot{\vec{u_r}} = \dfrac{d\vec{u_r}}{d\alpha} \times \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{d\left(cos\alpha\,\vec{i} + sin\alpha\,\vec{j}\right)}{d\alpha} \times \dot{\alpha} = \dot{\alpha} \times \left(\dfrac{d(cos\alpha)}{d\alpha}\vec{i} + cos\alpha\dfrac{d\vec{i}}{d\alpha} + \dfrac{d(sin\alpha)}{d\alpha}\vec{j} + sin\alpha\dfrac{d\vec{j}}{d\alpha}\right) \end{cases}$$

Or, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne varient ni au cours du temps, ni an fonction de α, leurs dérivées sont donc nulles.
$\dfrac{d\vec{i}}{dt} = \dfrac{d\vec{j}}{dt} = \vec{0}$ et $\dfrac{d\vec{i}}{d\alpha} = \dfrac{d\vec{j}}{d\alpha} = \vec{0}$

Et, nous savons dériver les sinus et cosinus en fonction de l'angle : $\dfrac{d(sin\alpha)}{d\alpha} = cos\alpha$ et $\dfrac{d(cos\alpha)}{d\alpha} = -sin\alpha$

Et donc :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u_\theta}}{dt} = \dot{\alpha} \times \left(-cos\alpha\,\vec{i} - sin\alpha\,\vec{j}\right) = -\dot{\alpha}\vec{u_r} \\ \dfrac{d\vec{u_r}}{dt} = \dot{\alpha} \times \left(-sin\alpha\,\vec{i} + cos\alpha\,\vec{j}\right) = \dot{\alpha}\vec{u_\theta} \end{cases}$$

Alors, comment varie le vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$ au cours d'une rotation autour du point O ?

$\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d(r\vec{u_r})}{dt} = r\dot{\alpha}\vec{u_\theta} = v\vec{u_\theta}$ (parce que r est constant)

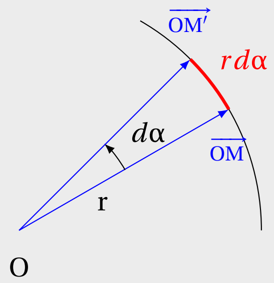
Et l'accélération : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = r\ddot{\alpha}\vec{u_\theta} - r\dot{\alpha}^2\vec{u_r} = \dfrac{dv}{dt}\vec{u_\theta} - \dfrac{r^2\dot{\alpha}^2}{r}\vec{u_r}$

Or, dans la base de Frenet : $\vec{u_\theta} = \vec{u_T}$ et $\vec{u_r} = -\vec{u_N}$

donc $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\vec{u_T} + \dfrac{v^2}{r}\vec{u_N}$

Quelques compléments :

Longueur d'un arc de cercle :



Quand le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ décrit un angle $d\alpha$, le point M se déplace sur un arc de cercle de longueur $rd\alpha$ si l'angle α est exprimé en radian.

En effet, la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle au rayon de l'arc et à l'angle encadrant l'arc.

Ainsi le périmètre d'un cercle est $\mathrm{P} = 2\pi r$ où 2π est l'angle d'un tour complet en radian.

Astuce pour la dérivée :

- D'une part :
  $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ représente la variation de l'angle α en fonction du temps.
  On note le rapport précédent $\dfrac{d\alpha}{dt}$ pour des Δt infiniment petits. On l'appelle dérivée de α par rapport au temps, mais il reste un simple rapport comme n'importe quel autre !
  Or, il est toujours possible de multiplier les numérateur et dénominateur d'un rapport par un nombre quelconque : $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\alpha \times \Delta x}{\Delta t \times \Delta x} = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta x} \times \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$
  C'est la même chose pour les dérivées :
  $$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha \times dx}{dt \times dx} = \frac{d\alpha}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$
- D'autre part :
  On a toujours $(uv)' = u'v + uv'$